铜仁一中高二年级防疫期间“停课不停学”网上第五次周考数学（理科）参考答案

一、选择题

1．B

【解析】

【分析】

分析不等式的形式，判断最合适证明的方法，

【详解】

要证明$\sqrt{8}-\sqrt{5}<\sqrt{10}-\sqrt{7}$用分析法最合理；

因为题目不容易找到证明的突破口，所以不适合用综合法，

又因为归纳法需要一个总结归纳的对象，所以不适合用归纳法.

比较法是找不出研究对象的相同点和不同点，

故不适合用比较法；故最合理的证明方法是分析法.

故选：B

【点睛】

本题考查了推理和证明的方法，需掌握几种证明方法的特征，属于基础题.

2．C

【解析】

【分析】

先判定点$(\pi,-1)$是否为切点，再利用导数的几何意义求解.

【详解】

当$x=\pi$时，$y=2\sin\pi+\cos\pi=-1$，即点$(\pi,-1)$在曲线$y=2\sin x+\cos x$

上．$\because y'=2\cos x-\sin x,\therefore y'\big|_{x=\pi}=2\cos\pi-\sin\pi=-2,$则$y=2\sin x+\cos x$在点$(\pi,-1)$处的切线

方程为$y-(-1)=-2(x-\pi)$，即$2x+y-2\pi+1=0$．故选C．

【点睛】

本题考查利用导数工具研究曲线的切线方程，渗透了直观想象、逻辑推理和数学运算素养．采取导数法，利用函数与方程思想解题．学生易在非切点处直接求导数而出错，首先证明已知点是否为切点，若是切点，可以直接利用导数求解；若不是切点，设出切点，再求导，然后列出切线方程.

3．A

【解析】

分析：分析该演绎推理的大前提、小前提和结论，可以得出正确的答案.

详解：根据题意，该演绎推理的

大前提是：指数函数 $y=a^x\left(a>0,a\neq 1\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数，

小前提是 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是指数函数，

结论是 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数.

其中大前提是错误的，

因为 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是减函数，致使得出的结论错误，故选 A.

点睛：该题考查的是有关演绎推理的定义问题，在解决问题的过程中，需要先分清大前提、小前提和结论分别是什么，之后结合定义以及对应的结论的正确性得出结果.

4．C

【解析】

【分析】

根据定积分的几何性质和定积分的运算，得到答案.

【详解】

$\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-x^2}\right)dx$ 表示圆心在原点，半径为 $\sqrt{2}$ 的 $\frac{1}{4}$ 圆的面积，

为 $\frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$，$\int_0^{\sqrt{2}}xdx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\sqrt{2}}=1$，

所以定积分 $\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-x^2}-x\right)dx=\frac{\pi}{2}-1$.

故选：C.

【点睛】

本题考查定积分的几何意义和定积分的计算，属于简单题.S

5．D

【解析】

【分析】

先利用函数的奇偶性排除 A,B,再由当 $x \to +\infty$ 时, $f(x) \to +\infty$ 作出判断.

【详解】

由题,$\because f(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{-x^{3}} = -f(x)$,$\therefore f(x)$ 是奇函数,排除 A,B;

又 $\because x \to +\infty$ 时, $f(x) \to +\infty$ 且增长迅速,$\therefore$ 排除 C,

故选:D

【点睛】

本题考查函数的图象的识别,考查函数的奇偶性的应用.

6．B

【解析】

【分析】

由已知中的程序可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，即可求解.

【详解】

模拟程序的运行，可得：$i = 0, n = 0, S = 0$

执行循环体，$i = 1, n = 1, S = 1$；

不满足判断条件 $i \geq 7$，执行循环体，$i = 2, n = 3, S = 4$；

不满足判断条件 $i \geq 7$，执行循环体，$i = 3, n = 6, S = 10$；

不满足判断条件 $i \geq 7$，执行循环体，$i = 4, n = 10, S = 20$；

不满足判断条件 $i \geq 7$，执行循环体，$i = 5, n = 15, S = 35$；

不满足判断条件 $i \geq 7$，执行循环体，$i = 6, n = 21, S = 56$；

不满足判断条件 $i \geq 7$，执行循环体，$i = 7, n = 28, S = 84$；

满足判断条件 $i \geq 7$，退出循环，输出 S 的值为 84.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的计算与输出问题，其中解答中模拟程序运行的过程，通过逐次

计算和找出计算的规律是解答的关键，着重考查了推理与计算能力，属于基础题.

7．C

【解析】

【分析】

首先分析题目求用数学归纳法证明 1+2+3+…+$n^2=\frac{n^4+n^2}{2}$时，当 n=k+1 时左端应在 n=k 的基础上加上的式子，可以分别使得 n=k，和 n=k+1 代入等式，然后把 n=k+1 时等式的左端减去 n=k 时等式的左端，即可得到答案.

【详解】

当 n=k 时，等式左端=1+2+…+k^2，

当 n=k+1 时，等式左端=1+2+…+k^2+k^2+1+k^2+2+…+（k+1）^{2}，增加了项（k^2+1）+（k^2+2）+（k^2+3）+…+（k+1）^{2}.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查数学归纳法，属于中档题./

8．B

【解析】

【分析】

由抛物线的几何性质可知：$BP\|x$轴，$AQ\|x$轴，结合抛物线定义可知

$|BP|+|AQ|=|AF|+|BF|=x_1+x_2$，联立方程，利用韦达定理可得结果.

【详解】

由抛物线的几何性质可知：$BP\|x$轴，$AQ\|x$轴，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$|BP|=|BF|$，$|AQ|=|AF|$，

知$|BP|+|AQ|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p$，

联立直线l与抛物线的方程$\begin{cases}y=x-1,\\y^2=4x,\end{cases}$消$y$有$x^2-6x+1=0$，

由韦达定理知$x_1+x_2=6$，

所以$|BP|+|AQ|=6+2=8$，故选 B.

【点睛】

本题考查了直线与抛物线的位置关系，考查了抛物线定义及几何性质，考查了韦达定理，考查了转化思想，方程思想，属于中档题.

9．D

【解析】

由题意可知 CA,CB,CD 两两垂直，所以补形为长方形，三棱锥与长方体共球，

$(2R)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2^2+2^2=16$，求的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$，选 D

【点睛】

求共点三条侧棱两两垂直的三棱锥外接球相关问题，我们常用的方法为补形成长方体，转化为求长方体的外接球问题。充分体现补形转化思想。

10．A

【解析】

【分析】

根据题意,分别假设四个人打碎玻璃,结合他们的对话,得矛盾,即可得解.

【详解】

假设是宝宝打碎玻璃,则宝宝说谎话,可可说谎话,毛毛说实话,多多说实话,与题意只有一个小孩说实话矛盾,所以假设不成立,即宝宝没有打碎玻璃;

假设是可可打碎玻璃,则宝宝说实话,可可说谎话,毛毛说实话,多多说实话,与题意只有一个小孩说实话矛盾,所以假设不成立,即可可没有打碎玻璃;

假设是多多打碎玻璃,则宝宝说谎话,可可说谎话,毛毛说实话,多多说谎话,与题意只有一个小孩说实话相符,所以假设成立,即多多打碎玻璃;

假设是毛毛打碎玻璃,则宝宝说谎话,可可说实话,毛毛说谎话,多多说实话,与题意只有一个小孩说实话矛盾,所以假设不成立,即毛毛没有打碎玻璃;

综上可知,是多多打碎玻璃

故选:A

【点睛】

本题考查了推理的简单应用,假设问题并推出矛盾,属于基础题.

11．B

【解析】

【分析】

利用球体的体积公式得$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{\pi d^3}{6}$，得出$d$的表达式，再将$\pi$的近似值代入可得出$d$的最精确的表达式.

【详解】

由球体的体积公式得$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{\pi d^3}{6}$，$\because d=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$，$\frac{6}{\pi}\approx1.9099$，

$\frac{16}{9}\approx1.7778$，$\frac{21}{11}\approx1.9091$，$\frac{300}{157}\approx1.9082$，$\frac{21}{11}$与$\frac{6}{\pi}$最为接近，故选 B.

【点睛】

本题考查球体的体积公式，解题的关键在于理解题中定义，考查分析问题和理解问题的能力，属于中等题.

12．A

【解析】

【详解】

试题分析：对函数$f(x)=e^x+x-2$求导得$f'(x)=e^x+1$，函数单调递增，

$f(0)=-1\langle0,f(1)=e+1\rangle0$，由$f(a)=0$知$0<a<1$，同理对函数$g(x)=\ln x+x^2-3$求导，知在定义域内单调递增，$g(1)=-2<0$，由$g(b)=0$知$b>1$，所以$g(a)<0<f(b)$.

考点：利用导数求函数的单调性.

【方法点睛】

根据函数单调性和导数的关系，对函数$f(x)=e^x+x-2$求导得$f'(x)=e^x+1>0$，函数单调递增，

$f(0)=-1\langle0,f(1)=e+1\rangle0$，进一步求得函数$f(x)=e^x+x-2$的零点$0<a<1$；同理对函数$g(x)=\ln x+x^2-3$求导，知在定义域内单调递增，$g(1)=-2<0$，由$g(b)=0$知$g(x)=\ln x+x^2-3$的零点$b>1$，

所以$\therefore g(a)=\ln a+a^2-3<g(1)=\ln1+1-3=-2<0$，

$f(b)=e^b+b-2>f(1)=e+1-2=e-1>0$.

即$g(a)<0<f(b)$.

二、填空题

13．$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】

根据复数的除法运算，化简得$z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，进而求得复数的虚部，得到答案.

【详解】

由题意，复数$z=\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，所以复数$z$的虚部为$\frac{3}{2}$.

故答案为：$\frac{3}{2}$.

【点睛】

本题主要考查了复数的运算，以及复数的概念的应用，其中解答中熟记复数的概念，熟练应用复数的除法运算法则化简是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

【点睛】

本题主要考查了复数的几何意义,属于基础题.

14．$\frac{e-1}{3}$

【解析】

【分析】

利用积分求出阴影部分的面积，结合几何概型的概率公式进行计算即可.

【详解】

解：由积分的几何意义得阴影部分的面积$S=\int_0^1 e^x dx=e^x|_0^1=e-1$，

长方形$OABC$的面积$S=1\times 3=3$，则点P落在阴影部分内的概率$P=\frac{e-1}{3}$，

故答案为$\frac{e-1}{3}$

【点睛】

本题主要考查几何概型的概率的计算，根据条件求出曲线的解析式，利用积分求出阴影部分的面积是解决本题的关键.

15．$\pm\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

由抛物线方程可知焦点为$F(1,0)$,连接AF,BF,根据三角形的三边关系可得$|AF|+|BF|\geq|AB|$,则利用抛物线的定义可得$(x_A+1)+(x_B+1)\geq 6$,即可得到AB中点的横坐标的最小值为2,当且仅当AB过焦点F时取到最小值,即可设$l:y=k(x-1)$,代入抛物线方程中,利用韦达定理求解即可.

【详解】

设抛物线的焦点为$F(1,0)$,连接AF,BF,则$|AF|+|BF|\geq|AB|$,

所以$(x_A+1)+(x_B+1)\geq 6$,则$\frac{x_A+x_B}{2}\geq 2$,即AB中点的横坐标的最小值为2,当且仅当AB过焦点F时取到最小值.

设直线$l:y=k(x-1)$,代入$C:y^2=4x$,可得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,

所以$x_A+x_B=\frac{2k^2+4}{k^2}=4$,可得$k=\pm\sqrt{2}$,

故答案为:$\pm\sqrt{2}$

【点睛】

本题考查抛物线的定义的应用,考查直线与抛物线的位置关系的应用,考查已知弦长求参数.

16．2

【解析】

【分析】

令$g(x)=x^2f(x)$,先判断函数g(x)的奇偶性和单调性，得到$e^x>ax$在R上恒成立，再利用导数分析解答即得解.

【详解】

因为当$x>0$时，有不等式$x^2f'(x)>-2xf(x)$成立,

所以$x^2f'(x)+2xf(x)>0,\therefore[x^2f(x)]'>0$,

令$g(x)=x^2f(x)$,所以函数g(x)在（0，+∞）上单调递增，

由题得$g(-x)=x^2f(-x)=-x^2f(x)=-g(x)$,

所以函数g(x)是奇函数，所以函数在R上单调递增.

因为对 $\forall x \in R$，不等式 $e^{2x} f\left(e^{x}\right)-a^{2} x^{2} f\left(a x\right)>0$ 恒成立，

所以 $e^{2x} f\left(e^{x}\right)>a^{2} x^{2} f\left(a x\right), \therefore g(e^{x})>g(ax), \therefore \mathrm{e}^{x}>a x$，

因为 a>0,所以当 x≤0 时，显然成立.

当 x＞0 时，$a<\dfrac{e^{x}}{x}=h(x)\,(x>0)$，

所以 $h'(x)=\dfrac{(x-1)e^{x}}{x^{2}}$，所以函数 h(x)在（0,1）单调递减，在（1，+∞）单调递增.

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=e$，

所以 a＜e,

所以正整数 a 的最大值为 2.

故答案为 2

【点睛】

本题主要考查函数的奇偶性及其应用，考查函数单调性的判断及其应用，考查利用导数研究不等式的恒成立问题，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平和分析推理能力.属于中档题.

三、解答题：

17.（1）$-3<m<-\dfrac{1}{2}$；（2）$m=-1$时，$|z|$取最小值$\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

（1）由题意列出不等式组，求解即可得出结果；

（2）根据题意得到$|z|=\sqrt{(1+2m)^{2}+(3+m)^{2}}$，用配方法整理即可得出结果.

【详解】

（1）因为复数 $z=(1+2m)+(3+m)i\,(m\in \boldsymbol{R})$ 在复平面上所对应的点在第二象限，所以有

$\begin{cases}1+2m<0\\3+m>0\end{cases}$，解得 $-3<m<-\dfrac{1}{2}$，即 m 的取值范围为 $-3<m<-\dfrac{1}{2}$；

（2）因为 $|z|=\sqrt{(1+2m)^{2}+(3+m)^{2}}=\sqrt{5m^{2}+10m+10}=\sqrt{5(m+1)^{2}+5}\geq\sqrt{5}$，当且仅当 $m=-1$ 时，取最小值，且 $|z|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$.

【点睛】

本题主要考查复数的几何意义，熟记概念及模的计算公式即可，属于基础题型.

18.（1）$a_2=\frac{1}{6},a_3=\frac{1}{12},a_4=\frac{1}{20}$；（2）$a_n=\frac{1}{n(n+1)},n\in N^*$，证明见解析

【解析】

【分析】

（1）分别令$n=2,n=3,n=4$代入$S_n=n^2a_n$中求解即可；

（2）利用数学归纳法证明：当$n=1$时,易证命题成立；假设$n=k(k\geq 2)$时,命题成立,利用该归纳假设,去证明当$n=k+1$时,命题也成立

【详解】

（1）由题,当$n=2$时,$S_2=2^2a_2=a_1+a_2$,则$3a_2=\frac{1}{2}$,即$a_2=\frac{1}{6}$,

当$n=3$时,$S_3=3^2a_3=a_1+a_2+a_3$,则$8a_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$,即$a_3=\frac{1}{12}$,

当$n=4$时,$S_4=4^2a_4=a_1+a_2+a_3+a_4$,则$15a_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$,即$a_4=\frac{1}{20}$

（2）$a_n=\frac{1}{n(n+1)},n\in N^*$,

证明：①当$n=1$时,$a_1=\frac{1}{1\times(1+1)}=\frac{1}{2}$,命题成立;

②假设当$n=k(k\geq 2)$时,命题成立,即$a_k=\frac{1}{k(k+1)}$,

则当$n=k+1$时,$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=(k+1)^2a_{k+1}-k^2a_k=(k^2+2k+1)a_{k+1}-k^2a_k$,

则$(k^2+2k)a_{k+1}=k^2a_k$,即$(k+2)a_{k+1}=ka_k$,

所以$a_{k+1}=\frac{k}{k+2}a_k=\frac{k}{k+2}\cdot\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{(k+1)(k+1+1)}$,

所以当$n=k+1$时,命题也成立

由①②知,命题对$n\in N^*$都成立,即$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

【点睛】

本题考查已知a_n与S_n的关系求项,考查数学归纳法的应用,考查推理论证的能力,考查运算能力

19.（1）$\frac{2\sqrt{7}}{7}$；（2）存在，PE的中点.

【解析】

【分析】

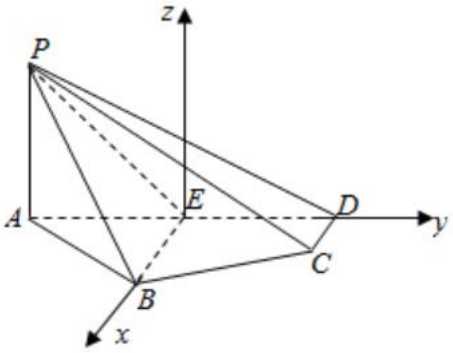
（1）作$Ez \perp AD$，以E为原点，以$\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED}$的方向分别为$x$轴，$y$轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，求出平面PBC的法向量、平面PBE的法向量即可得二面角$C-PB-E$的的余弦值；

（2）线段PE上存在点M，使得$DM//$平面PBC”等价于$\overrightarrow{DM}$垂直面PBC的法向量.

【详解】

作$Ez \perp AD$，以E为原点，以$\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED}$的方向分别为$x$轴，$y$轴的正方向，

建立如图所示的空间直角坐标系，



则$E(0,0,0),P(0,-2,2),A(0,-2,0)$，$B(2,0,0)$，$C(1,2,0),D(0,2,0)$

则$\overrightarrow{PB}=(2,2,-2),\overrightarrow{BC}=(-1,2,0),\overrightarrow{EP}=(0,-2,2)$

设平面PBC的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$,有$\begin{cases}x+y-z=0\\ -x+2y=0\end{cases}$

则可以取$\vec{n}=(2,1,3)$

设平面PBE的法向量为$\vec{m}=(a,b,c)$，

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EP}=0\end{cases}$,有$\begin{cases}a+b-c=0\\ -b+c=0\end{cases}$

则可以取$\vec{m}=(0,1,1)$

所以$\cos\left\langle\vec{n},\vec{m}\right\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{1+3}{\sqrt{14}\times\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

由图可知, 二面角$C-PB-E$的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

(2) 由（1）可知面PBC的法向量为$\vec{n}=(2,1,3)$,

“线段PE上存在点M，使得DM // 平面PBC”等价于$\overrightarrow{DM}\perp\vec{n}$,

$\overrightarrow{EP}=(0,-2,2)$，设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PE}=(0,2\lambda,-2\lambda)$,$\lambda\in(0,1)$

则$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PM}=(0,-4,2)+(0,2\lambda,-2\lambda)=(0,2\lambda-4,2-2\lambda)$

由$\overrightarrow{DM}\cdot\vec{n}=0$，得$2\lambda-4+6-6\lambda=0$解得$\lambda=\dfrac{1}{2}$.

所以线段PE上存在点M，即PE中点，使得DM / / 平面PBC.

【点睛】

本题考查了线面平行的判定，向量法求二面角、动点问题，考查了转化思想，属于中档题.

20.（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（2）存在定点$P(\dfrac{11}{8},0)$,使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$为定值.

【解析】

【分析】

（I）根据点P与两焦点构成的三角形的周长为6,离心率为$\dfrac{1}{2}$，结合性质$a^2=b^2+c^2$ ，列出关于a 、b 、c的方程组，求出a 、b，即可得结果；（II）设出直线方程，直线方程与椭圆方程联立，消去y可得关于x的一元二次方程，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$表示为$x_1x_2+y_1y_2$，利用韦达定理化简可得$\dfrac{(5+8n)k^2+12}{4k^2+3}+n^2$，令$\dfrac{5+8n}{4}=\dfrac{12}{3}$可得结果.

【详解】

（I）由题设得$2a+2c=6$,又$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,解得$a=2,c=1,\therefore b=\sqrt{3}$.

故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（II）$F_2(1,0)$,当直线l的斜率存在时,设此时直线l的方程为$y=k(x-1)$,

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,把$y=k(x-1)$代入椭圆C的方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,消去$y$并整理得,

$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,则$x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$,

可得$y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=-\frac{9k^2}{3+4k^2}$.设点$P(n,0)$,

那么$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-n,y_1)\cdot(x_2-n,y_2)=x_1x_2-n(x_1+x_2)+n^2+y_1y_2=-\frac{(5+8n)k^2+12}{4k^2+3}+n^2$,

若x轴上存在定点P,使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$为定值,则有$\frac{5+8n}{4}=\frac{12}{3}$,解得$n=\frac{11}{8}$,

此时,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-4+n^2=-\frac{135}{64}$,

当直线l的斜率不存在时,此时直线l的方程为$x=1$,把$x=1$代入椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$解得$y=\pm\frac{3}{2}$,

此时,$A(1,\frac{3}{2})$,$B(1,-\frac{3}{2})$,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-\frac{3}{8},\frac{3}{2})\cdot(-\frac{3}{8},-\frac{3}{2})=-\frac{135}{64}$,

综上,在x轴上存在定点$P(\frac{11}{8},0)$,使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$为定值.

【点睛】

本题主要考查待定系数法求椭圆标准方程、圆锥曲线的定值问题以及点在曲线上问题，属于难题. 探索圆锥曲线的定值问题常见方法有两种：① 从特殊入手，先根据特殊位置和数值求出定值，再证明这个值与变量无关；② 直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

21.（1）$-\frac{1}{2}-\ln 2$；（2）3.

【解析】

试题分析：（1）本小题是考查导数的几何意义，求出导函数 $f'(x)$，所求切线斜率即为 $f'(1)$；（2）不等式 $f(x)>\frac{k}{x+1}$ 整理得 $\frac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}>k$，因此只要求得 $h(x)=\frac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}$（$x>0$）的最小值即可，为此求出 $h'(x)=\frac{x-1-\ln(x+1)}{x^2}$，为确定 $h'(x)$ 的零点，同样要对其分子 $\varphi(x)=x-1-\ln(x+1)$ $(x>0)$ 研究单调性，这可由 $\varphi'(x)$ 得出.

试题解析：（1）$\because f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\ln(x+1)}{x^2}$，

$\therefore f'(1)=-1+\frac{1}{2}-\ln 2=-(\frac{1}{2}+\ln 2)$.

当 $x>0$ 时，$f(x)>\frac{k}{x+1}$ 即 $h(x)=\frac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}>k$ 对 $x>0$ 恒成立.

即 $h(x)(x>0)$ 的最小值大于 k.

$h'(x)=\frac{x-1-\ln(x+1)}{x^2}$，记 $\varphi(x)=x-1-\ln(x+1)(x>0)$，

则 $\varphi'(x)=\frac{x}{x+1}>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续递增.

又 $\varphi(2)=1-\ln 3<0$，$\varphi(3)=2-2\ln 2>0$，所以 $\varphi(x)$ 存在唯一零点 x_0，且满足 $x_0\in(2,3)$，

$x_0=1+\ln(x_0+1)$.

由 $x>x_0$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$；$0<x<x_0$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$ 知：

$h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)=\frac{(x_0+1)[1+\ln(x_0+1)]}{x_0}=x_0+1\in(3,4)$.

所以正整数 k 的最大值为 3.

考点：导数的几何意义，导数与函数的单调性，函数的极值，不等式恒成立.

【名师点睛】1．导数的几何意义是切点处切线的斜率，应用时主要体现在以下几个方面：

（1）已知切点 A（x_0，$f(x_0)$）求斜率 k，即求该点处的导数值：$k=f'(x_0)$；

（2）已知斜率 k，求切点 A（x_1，$f(x_1)$），即解方程 $f'(x_1)=k$；

（3）已知过某点 M（x_1，$f(x_1)$）（不是切点）的切线斜率为 k 时，常需设出切点 A（x_0，$f(x_0)$），利用 $k=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ 求解.

．解决含参数问题及不等式问题中的两个转化

（1）利用导数解决含有参数的单调性问题可将问题转化为不等式恒成立问题，要注意分类讨论和数形结合思想的应用．

（2）将不等式的证明、方程根的个数的判定转化为函数的单调性、极值问题处理．

22．（1）$(x-1)^2+y^2=1$；（2）$\frac{1}{2}$．

【解析】

试题分析：（1）根据直角坐标和极坐标的互化公式 x=ρcosθ、y=ρsinθ，把圆 C 的极坐标方程化为直角坐标方程．（2）由题意可得点 A 在直线$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \end{cases}$（t 为参数）上，把直线的参数方程代入曲线 C 的方程可得$t^2+\frac{1-\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}=0$．由韦达定理可得$t_1t_2=-\frac{1}{2}$，根据参数的几何意义可得|AP|•|AQ|=$|t_1t_2|$的值

试题解析：（1）由$\rho=2\cos\theta$，得$\rho^2=2\rho\cos\theta$

Q$\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，

$\therefore x^2+y^2=2x$即$(x-1)^2+y^2=1$，

即圆C的直角坐标方程为$(x-1)^2+y^2=1$；

（2）由点A的极坐标$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$得点$A$直角坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

将$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \end{cases}$代入$(x-1)^2+y^2=1$消去$x$、$y$，整理得$t^2-\frac{\sqrt{3}-1}{2}t-\frac{1}{2}=0$，

设t_1、t_2为方程$t^2-\frac{\sqrt{3}-1}{2}t-\frac{1}{2}=0$的两个根，则$t_1t_2=-\frac{1}{2}$，

所以$|AP|\cdot|AQ|=|t_1t_2|=\frac{1}{2}$.

考点：简单曲线的极坐标方程；参数方程化成普通方程